演習「統計的処理について」2

蛭川　潤一

新潟大学・自然科学系

2018 年 5 月 21 日

ペテルスブルグのパラドックス

Remark

- 大数の法則においては
  分散が存在する（$V(X) = \sigma^2 < \infty$）ことを仮定しているが
  有限分散という条件は証明を簡単にするための条件である
- 実際（証明はかなり難しくなるものの）
  期待値の存在（$E(X) = \mu < \infty$）という条件のみの下で
  大数の法則が成り立つことを示すことができる
  （例えば，*Ash and Doléans-Dade (2000)* を参照）

「期待値が存在しない場合」
$\Downarrow$ $E(X) = \mu$ が存在しない
大数の法則はそのままの形では成り立たないことは明らか

ペテルスブルグのパラドックス

Exercise

ゆがみのないコインを投げて
k 回目にはじめて表が出れば 2^k 円もらえる賭けを考える
ただし，k は正の整数である

「この賭けの期待値」
$\Downarrow$ $P(X = 2^k) = \frac{1}{2^k}$ に注意して

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P\left(X = 2^k\right) \times 2^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \times 2^k = 1 + 1 + \cdots = \infty$$

$\Rightarrow$
この賭けの期待値は無限大である
$\Rightarrow$
この賭けから「期待できる賞金」が無限大であるということになる

ペテルスブルグのパラドックス

Question ?

この賭けを独立に繰り返した時の賞金を $X_1, X_2, \ldots$ とすると
n 回目までの平均 $\overline{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ は無限大に発散するのだろうか？

$$X_i^{(k)} = X_i \times \chi_{\{X_i = 2^k\}} = \begin{cases} X_i & \text{if} \quad X_i = 2^k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} = \begin{cases} 2^k & \text{if} \quad X_i = 2^k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義する（k は任意の正の整数）

$\Rightarrow$
コインを投げてちょうど k 回目にはじめて表が出たときだけ
2^k 円もらえる賭けである

ペテルスブルグのパラドックス

「もともとの賭けの賞金」

$\Downarrow \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{\{X_i=2^k\}} = 1$ に注意して

$$X_i = X_i \times \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{\{X_i=2^k\}} = \sum_{k=1}^{\infty} X_i \times \chi_{\{X_i=2^k\}} = \sum_{k=1}^{\infty} X_i^{(k)}$$

Remark

右辺の無限和は，実は 1 項だけが正でほかの項はすべて 0 である

ペテルスブルグのパラドックス

⇓ 右辺を有限項で切って

$$Y_i^{(K)} = \sum_{k=1}^{K} X_i^{(k)}$$

とする

⇒

もともとの賭けの変形で

最高 2^K 円までの賞金をもらえる賭けとなる

$\Downarrow E\left(X_i^{(k)}\right) = 2^k \times P\left(X_i^{(k)} = 2^k\right) + 0 \times P\left(X_i^{(k)} = 0\right) = 2^k \times \frac{1}{2^k} = 1$

に注意して

$E\left(Y_i^{(K)}\right) = \sum_{k=1}^{K} E\left(X_i^{(k)}\right) = \sum_{k=1}^{K} 1 = K$

ペテルスブルグのパラドックス

全ての i について

$$\begin{aligned} X_i &= \sum_{k=1}^{\infty} X_i^{(k)} \\ &\geq \sum_{k=1}^{K} X_i^{(k)} = Y_i^{(K)} \end{aligned}$$

⇒

$$\begin{aligned} \overline{X}_n &= \frac{1}{n}\{X_1 + \cdots + X_n\} \\ &\geq \frac{1}{n}\left\{Y_1^{(K)} + \cdots + Y_n^{(K)}\right\} = \overline{Y}_n^{(K)} \end{aligned}$$

ペテルスブルグのパラドックス

$\Downarrow E\left(Y_i^{(K)}\right) = K < \infty$

右辺については大数の法則が成り立つ

⇒

$$\overline{X}_n \geq \overline{Y}_n^{(K)} \xrightarrow{P} K$$

K は任意だからいくらでも大きくとれる

⇒

$\overline{X}_n$ は無限大に発散する

$X_i^{(k)}$ について

$$X_i^{(k)} = \begin{cases} 2^k & \text{if} \quad X_i = 2^k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\Rightarrow$
「平均して 2^k 回に 1 回 2^k の値をとり，その他の回は 0 である」
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} E\left(X_i^{(k)}\right) &= P\left(X_i^{(k)} = 2^k\right) \times 2^k + P\left(X_i^{(k)} = 0\right) \times 0 \\ &= P\left(X_i = 2^k\right) \times 2^k = \frac{1}{2^k} \times 2^k = 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$
2^k という値をとったときに
その値が他の $2^k - 1$ 回の 0 と平均されて平均値が 1 となる

$X_i^{(k)}$ について

$$\begin{aligned} \overline{X}_n &= \frac{1}{n}\{X_1 + \cdots + X_n\} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} X_i^{(k)}\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{(k)}\right\} = \sum_{k=1}^{\infty}\overline{X}_n^{(k)} \end{aligned}$$

Remark

- 直感的には $X_i^{(k)}$ はときどき 2^k という大きな値をとり
  そのときに $\overline{X}_n$ を 1 だけ押し上げるというように理解できる
- したがって $\overline{X}_n$ の無限への発散はかなり遅いということが想像される

ペテルスブルグのパラドックス

Excel によるシミュレーション（模擬実験）：

Step (1)

乱数を発生させる

「データ」–>「データ分析」–>「乱数発生」

「変数の数」1
「乱数の数」10000
「分布」ベルヌーイ
「p 値」0.5

–>「OK」

ペテルスブルグのパラドックス

Step (2)

何回目に 1 が出たかを調べる

B1 から B10000 <–「1 から 10000 を代入」

C1 <–「=IF(A1=1,$B1,"")」

C2 から C10000 <–「C1 をコピー」

C 列をコピー
D 列に「形式を選択して貼り付け」–>「値」

D 列を選択 –>「データ」–>「並べ替え」
–>「現在選択されている範囲を並べ替える」

ペテルスブルグのパラドックス

Step (3)

1 が出るまでの回数を調べて
賞金をもらい
賞金の平均値を求める

E1 <– 「=IF(ISNUMBER(D2),D2-D1,"")」
F1 <– 「=IF(ISNUMBER(E1),2^E1,"")」
G1 <– 「=IF(ISNUMBER(F1),SUM(F$1:F1)/B1,"")」

E1 から G1 を選択して
フィルハンドルをダブルクリック

ペテルスブルグのパラドックス

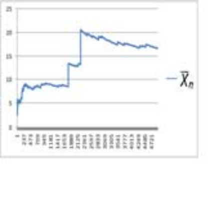
G 列の値のあるところを選択して
「挿入」 –>「グラフ」 –>「折れ線」 –>

cf

「*ISNUMBER*」
数値か否かを判定し，結果を論理値で返す
数値のとき *TRUE*
それ以外のとき *FALSE*

ペテルスブルグのパラドックス

ペテルスブルグのパラドックス:



ペテルスブルグのパラドックス

Excel でこの賭けの平均値 $\overline{X}_n$ をシミュレーションした結果の 1 つの例
⇒

Remark

- ペテルスブルグのパラドックスの賭けでは
  時々大きく儲けることによって
  平均値 $\overline{X}_n$ が押し上げられることが見てとれる
- シミュレーションのグラフは走らせるごとに毎回様子が変わるので
  この図はほんの一例である
- グラフから見る限り，$\overline{X}_n$ の無限への発散は
  非常にゆっくりであることがわかる

参考文献

- 「統計」 共立講座 21 世紀の数学 14 竹村 彰通 (著)
- Ash and Doléans-Dade (2000). *Probability and measure theory*. Second edition. Academic Press; Burlington.