

線形計画法とシンプレックス法 線形計画問題における基底解と最適解

グラフとネットワーク理論 (第2, 3回目)
理学部数学科3年向け
平成23年10月11,18日(火)4限 理学部棟 B304講義室

新潟大学 大学院自然科学研究科
情報理工学専攻

田中 環 (TANAKA, Tamaki)
E-mail: prtana@gs.niigata-u.ac.jp
http://m.sc.niigata-u.ac.jp/~prtana/

一般の最適化問題(数理計画問題)

目的関数 $f(x) \longrightarrow$ 最小化

制約条件 $g_1(x) \leq 0, \dots, g_m(x) \leq 0$

$h_1(x) = 0, \dots, h_l(x) = 0$

$x \in X$

実行可能領域
 $x \in S$ Feasible region

このような問題を数理計画問題といい、解を求める手法を数理計画法という。関数 f, g, h が一次式であるとき線形計画といい、そうでないとき、非線形計画といいます。線形の場合は、有名なシンプレックス法や内点法でおおむね解けています。

線形計画問題の具体例

- ある工場で、2種類の製品 A と B を生産している。製品 A を 1kg 生産するには、原料が 3 トン、電力が 1kWh 必要であり、製品 B を 1kg 生産するには、原料が 2 トン、電力が 2kWh 必要である。1日の原料、電力の使用可能量は、それぞれ 12 トン、8 kWh である。また、製品 A と B の 1kg あたりの利益はそれぞれ 1 万円である。この時、利益を最大にするには、A と B をいくらずつ生産すればよいかを求める問題に定式化せよ。

線形計画問題のモデル化

- 決定変数の決定**: 製品 A を x kg 生産し、製品 B を y kg 生産しようとする。決定変数とは制御可能な変数を指す。
- 目的関数の設定**: 最適化(最大化なのか最小化なのか)を図る目標が何で、決定変数との関係はどんな式で表されるのか?ここでは関数 f の最大化を考える。
- 制約条件の設定**: 問題を制限している(制約している)条件はどんなもので、決定変数との関係はどんな式で表されるのか?ここでは、条件式が 4 本ある。

線形計画問題

(Linear Programming Problem)

目的関数 $x + y \longrightarrow$ 最大化

制約条件 $3x + 2y \leq 12$
 $x + 2y \leq 8$
 $x \geq 0, y \geq 0$

※ この問題は一次方程式や一次不等式で表現される制約条件と一次式で表される目的関数からなっている数理計画問題なので、「線形計画問題」と呼ばれる。この研究は、1947年に線形計画法としてダンツィクにより始められた。その後、クーンとタッカーにより非線形計画法が研究され、それが凸解析学へと発展してゆく。

このような問題を考えるには、内積の線形表現が重要になってくる。

線形計画問題の実行可能領域

目的関数

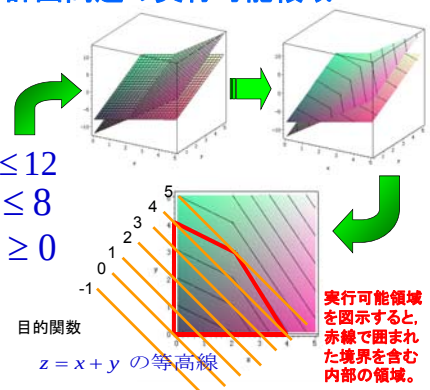
$x + y$

制約条件

$3x + 2y \leq 12$

$x + 2y \leq 8$

$x \geq 0, y \geq 0$



実行可能領域を明示すると、赤線で囲まれた境界を含む内部の領域。

内積の一次式表現による解釈

目的関数

$$x + y \quad \text{ベクトル}(1,1)\text{との内積を考えている。(等高線)}$$

制約条件

$$3x + 2y \leq 12 \quad \text{ベクトル}(3,2)\text{との内積が}12\text{以下となる半空間}$$

$$x + 2y \leq 8 \quad \text{ベクトル}(1,2)\text{との内積が}8\text{以下となる半空間}$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \quad \begin{array}{l} \text{ベクトル}(1,0)\text{との内積が}0\text{以上となる半空間} \\ \text{ベクトル}(0,1)\text{との内積が}0\text{以上となる半空間} \end{array}$$

Linear Programming

Linear programming problem can be solved by the simplex method invented by George Dantzig in 1947. We review its scheme of the algorithm.

Standard form of linear programming problem and matrix presentation

Minimize $-1x_1 - 1x_2 + 0x_3 + 0x_4$ (where x_3, x_4 are slack variables)

Subject to
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Standard form of linear programming problem

Minimize $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ where $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Subject to $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$ or $(\mathbf{c} | \mathbf{x})$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Basic Solution (基底解) and Feasible Basic Solution (実行可能基底解)

Since the left-hand matrix is **rank 2**, we can choose two vectors from the four column vectors of the matrix in order to form a basis of two dimensional Euclidean space. Any vector in the space can be uniquely written as a linear combination of elements of the basis. Therefore, vector (12,8) in the right hand side is also can be represented by a combination of scalars $(x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)$.

For example,

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$(2,3,0,0)$ is a basic solution (基底解), and it satisfies the non-negative condition and so it is called a feasible basic solution (実行可能基底解). However, $(8,0,-12,0)$ is a basic solution but not a feasible basic solution because it is not non-negative.

non-negativity 非負条件

Basic Variable (基底変数) and Non-Basic Variable (非基底変数)

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Nonzero variables of the combination of $(x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)$ are called "basic variables" and the others are called "non-basic variables."

For example, basic variables of basic solution $(2,3,0,0)$ are x_1 and x_2 and non-basic variables are x_3 and x_4 .

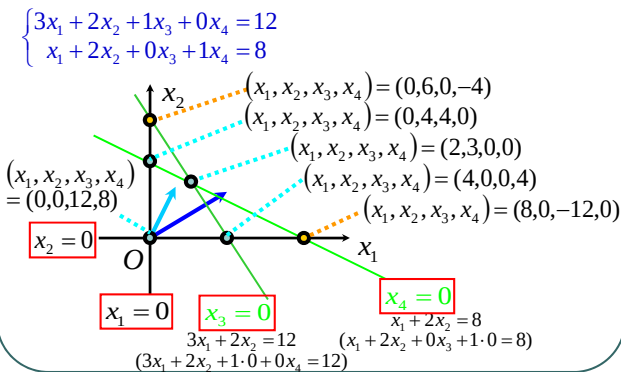
This case is $(x_1, x_2) = (2,3)$ and $(x_3, x_4) = (0,0)$

Please consider other combinations for this example.

$$\begin{array}{ll} (x_1, x_2) = (2,3) & (x_2, x_3) = (4,4) \\ (x_1, x_3) = (8,-12) & (x_2, x_4) = (6,-4) \\ (x_1, x_4) = (4,4) & (x_3, x_4) = (12,8) \end{array}$$

Basic variables of feasible basic solutions

Graphical interpretation of Basic Solutions



Simplex Method

The **simplex method** is a method for solving problems in *linear programming*. This method, invented by **George Dantzig** in **1947**, tests adjacent vertices of the feasible set (which is a **polytope**) in sequence so that at each new vertex the objective function improves or is unchanged. The simplex method is very efficient in practice, generally taking to iterations at most (where n is the number of equality constraints), and converging in **expected polynomial time** for certain distributions of random inputs (Nocedal and Wright 1999, Forsgren 2002). However, its worst-case complexity is **exponential**, as can be demonstrated with carefully constructed examples (Klee and Minty 1972).

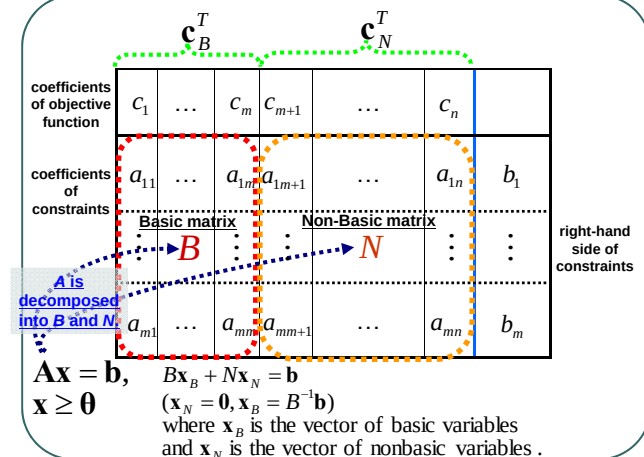
A different type of methods for linear programming problems are **interior point methods**, whose complexity is **polynomial** for both average and worst case. These methods construct a sequence of strictly feasible points (i.e., lying in the interior of the polytope but never on its boundary) that converges to the solution. Research on interior point methods was spurred by a paper from **Karmarkar (1984)**.

Standard form of linear programming problem

Minimize $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$
Subject to $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$,
 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

Minimize $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$
Subject to
 $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$
 $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$
 $\dots$
 $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$
 $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

- How to find an **initial feasible basic solution** of the problem.
- How to update such **feasible basic solutions** to get new vertexes in which the objective values are improved.



Basic Variable (基底変数) and Non-Basic Variable (非基底変数)

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Please consider basic solutions for this example.

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) &= (2, 3) & (x_2, x_3) &= (4, 4) \\ (x_1, x_3) &= (8, -12) & (x_2, x_4) &= (6, -4) \\ (x_3, x_4) &= (4, 4) & (x_3, x_4) &= (12, 8) \end{aligned}$$

Basic variables of feasible basic solutions

$$\mathbf{Bx}_B + \mathbf{Nx}_N = \mathbf{b}$$

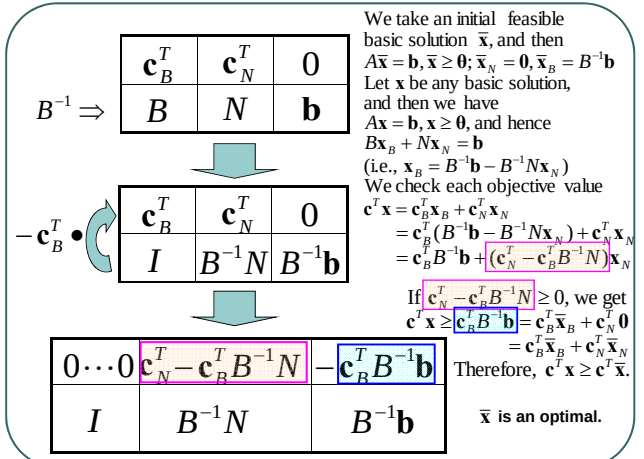
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Bx}_B + \mathbf{Nx}_N = \mathbf{b}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$



0^T	$c_N^T - c_B^T B^{-1}N$	$-c_B^T B^{-1}b$
I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

$Ax = b,$
 $x \geq 0$

We consider the case when not stopping of iteration, that is, the **termination condition** does not hold. $c_N^T - c_B^T B^{-1}N \neq 0$

Then, there are c_j a j -th column of c_N^T and a_j a j -th column vector of N such that $c_j - c_B^T B^{-1}a_j < 0$

where $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$

$(1) c^T(\bar{x} + \lambda d) = c^T \bar{x} + \lambda c^T d < c^T \bar{x}, \forall \lambda > 0.$

$(2) A(\bar{x} + \lambda d) = A\bar{x} + \lambda Ad = b + \lambda\{B(-B^{-1}a_j) + Ne_j\} = b + \lambda(-a_j + a_j) = b, \forall \lambda > 0.$

$(3) \bar{x} + \lambda d = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_j \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -B^{-1}a_j \\ e_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_j - \lambda B^{-1}a_j \\ \vdots \\ \bar{x}_n + \lambda \end{pmatrix} \geq 0$

$B^{-1}b - \lambda B^{-1}a_j \geq 0$
 となる最大の λ を求めたい
 (右辺の値が $B^{-1}b \geq 0$ となる時は

$B^{-1}b \geq \lambda B^{-1}a_j$
 成分で表すと

$\lambda = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{y}_i} \mid \bar{y}_i > 0 \right\}$

$\begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{pmatrix} \geq \lambda \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \vdots \\ \bar{y}_m \end{pmatrix}$

最大の λ は、次の式を満たすはず。

$\bar{b}_1 \geq 0, \bar{b}_2 \geq 0, \dots, \bar{b}_m \geq 0$

$B^{-1}b \geq 0$

$(1) \bar{y}_i \leq 0$ ならば、 λ が何であってても $\lambda > 0$ より $\lambda \bar{y}_i \leq 0$ となる。したがってその時は、 $\bar{b}_i \geq \lambda \bar{y}_i$ OK

$(2) \bar{y}_i > 0$ ならば、
 $\bar{b}_i \geq \lambda \bar{y}_i \Leftrightarrow \frac{\bar{b}_i}{\bar{y}_i} \geq \lambda$

シンプレックス法の計算手順(基本)

- ① 不等式がある場合は、**スラック変数**を利用して**標準形**に変形する。
- ② 行列とベクトルの成分を表(タブロー)にする。
- ③ **実行可能基底解**を1つ見つける。
 スラック変数を入れた場合は、単位行列が見えているので、それに対応する変数が基底変数となり、それ以外の変数は非基底変数となり、その成分は0とおくよい。
- ④ **基底行列**の部分を掃き出し法で単位行列に変形する。
 スラック変数を使った場合は最初から単位行列になっているので変形の必要がない。
- ⑤ 基底変数に対応する**目的関数の係数部分**をゼロ成分にするために掃き出し法を行う。
 スラック変数を使った場合は最初からゼロになっているので変形の必要がない。
- ⑥ 判定条件(判定項のすべての成分がゼロ以上ならば停止)
- ⑦ 次の**ピボット**の位置を探す。

Example of Simplex Method (1)

Maximize $X_1 + X_2$
subject to
 $3x_1 + 2x_2 \leq 12$
 $x_1 + 2x_2 \leq 8$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Minimize $-1x_1 - 1x_2 + 0x_3 + 0x_4$
subject to
 $3x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 12$
 $x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 8$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

Judgment condition
(Termination condition)

Initial feasible basic solution
 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 12, 8)$

Initial feasible basic variables are x_3 and x_4

-1	-1	0	0	0
3	2	1	0	12
1	2	0	1	8

Initial basic matrix

Example of Simplex Method (2)

-1	-1	0	0	0
3	2	1	0	12
1	2	0	1	8

By sweep-out method at 3.

0	-1/3	1/3	0	4
1	2/3	1/3	0	4
0	4/3	-1/3	1	4

Judgment condition
 (Termination condition)

0	0	1/4	1/4	5
1	0	1/2	-1/2	2
0	1	-1/4	3/4	3

— 5 : Optimal solution

Minimize の問題で -5 であつたので、元の Maximize の問題では最適値は、5 となる。

レポート問題

Please try to solve by the simplex method. スラック変数を3つ使って、制約式の3本とも等式条件に直す。

Minimize $-3x_1 - 2x_2 - 4x_3$
subject to
 $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4$
 $2x_1 + 2x_3 \leq 9$
 $2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 7$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

Minimize $-3x_1 - 2x_2 - 4x_3$
subject to
 $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4$
 $2x_1 + 2x_3 + x_5 = 9$
 $2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_6 = 7$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$

そして、その係数を取り出して、下のように表にする。

Judgment condition
(Termination condition)

-3	-2	-4	0	0	0	0
1	1	2	1	0	0	4
2	0	2	0	1	0	9
2	1	3	0	0	1	7

Initial basic matrix