内積の見方・考え方1

＜1次方程式と1次不等式，線形計画問題＞

グラフとネットワーク理論（第１回目）
理学部数学科3年向け
平成23年10月4日(火)4限 理学部棟 B304講義室

新潟大学 大学院自然科学研究科
数理物質科学専攻 数理科学コース
田中 環 (TANAKA, Tamaki)
E-mail:prtana@gs.niigata-u.ac.jp
http://m.sc.niigata-u.ac.jp/~prtana/

話の流れ

1. 一次関数(線形関数)の一般式
2. 線形関数の内積による表現
3. ベクトルの正射影と内積の関係
4. 一次方程式(超平面)と一次不等式(半空間)
5. 連立一次不等式の内積による解釈
6. 線形計画問題の内積による一次式表現

一次関数と一次不等式

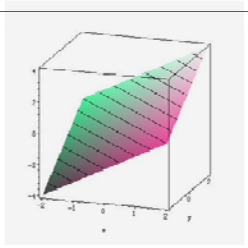
高等学校で習う「一次○○○」や関連したものには，次のようなものがある。

- ◆一次関数 $y = ax + b$
- ◆一次方程式 $ax + b = 0$
- ◆一次不等式 $ax + b < 0$, $ax + b \le 0$
- ◆直線の方程式 $ax + by + c = 0$
- ◆平面の方程式 $ax + by + cz + d = 0$
- ◆不等式の表す領域 $ax + by + c < 0$

《一次不等式の見方》
不等式 $x + y \le 1$ は，**不等式の表す領域**になっているが，実は**一次関数**

$$f(x, y) = x + y$$

の**高さ1以下のレベル集合**になっていて，その**関数のグラフは平面**になっている。また，その**等高線は同じ間隔で並んだ直線群**である。実は，一次関数のグラフは，次元が上がってもこのような性質を持ち合わせている。これを**線形性**と呼んでいる。



一次関数の一般形式

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ の関数 $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$が，高々それぞれの変数の1次式になっているとき，つまり次のような式で表現されているときに，この関数を**一次関数（線形関数）**と呼ぶ。

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$$

特に，二変数の場合には，

$f(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2$ と書いたり $f(x, y) = ax + by$

という表し方を使ったりする。

《注釈》もっと一般的に定数項を含めて考えることもあるが，そのときには**線形関数**とは呼ばず，**アフィン関数**と呼ぶこともある。線形関数は，原点を原点に移す写像である。

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + c$$
$$f(x, y) = ax + by + c$$

線形関数の内積による表現

二変数の一次関数（線形関数）の場合を考える。

$$f(x, y) = ax + by$$

この式はベクトルの言葉を使うと，ベクトル $\vec{p} = (x, y)$ と $\vec{n} = (a, b)$ の**内積**になっていることが分かる。

$$ax + by = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \vec{n}, \vec{p} \rangle$$

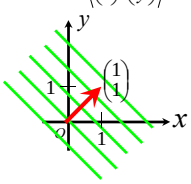
《注釈》通常，高等学校で学ぶ内積の定義は，次のように2通りあるが，同じ値になる。

$$\vec{n} \bullet \vec{p} = |\vec{n}||\vec{p}|\cos\theta \qquad \vec{n} \bullet \vec{p} = ax + by$$

このとき，上記の一次関数のベクトル $\vec{n}$ をこの関数の**法線ベクトル（勾配ベクトル）**と呼ぶ。**この関数の等高線はこの法線ベクトルの向きと直角を成す（垂直になっている）**。言い換えると，この関数のグラフのもっとも急な上り坂方向はどこでも同じ方向を指しているし，もっとも急な下り坂方向はその正反対の向きでみな同じ方向を指していることが分かる。
それはいったいなぜでしょう？

一次関数の係数ベクトル(法線ベクトル)と関数の等高線の関係 —垂直に交わる。

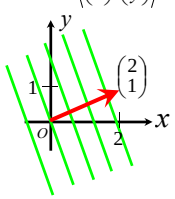
$f(x, y) = x + y = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle$



$x + y = 0$ とすると $y = -x$

$x + y = c$ とすると $y = -x + c$

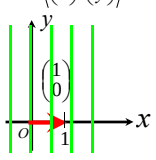
$f(x, y) = 2x + y = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle$



$2x + y = 0$ とすると $y = -2x$

$2x + y = c$ とすると $y = -2x + c$

$f(x, y) = x = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle$



$x = 0$ または $x = c$ とすると y の式では表せず，x 軸に垂直な直線となる。

内積の計算方法

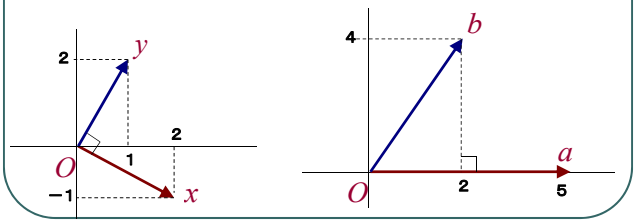
高等学校で学習した，ベクトル $\vec{x}=(x_1,x_2)$ と $\vec{y}=(y_1,y_2)$ の内積は次のようになっていた。

$$\langle \vec{x},\vec{y}\rangle = x_1y_1+x_2y_2$$

例題1

2次元ユークリッド空間において，次の2つのベクトルの内積を求めよ。

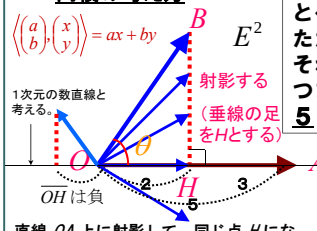
(1) $x=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ と $y=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$　　(2) $a=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ と $b=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$



高等学校の数学における内積の考え方

内積の考え方

$\left\langle \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle = ax+by$



直線 OA 上に射影して，同じ点 H になるような点 B は上の図のように直線 OA に垂直に交わる直線上に位置する。つまり，ベクトル OA との内積が一定になる点の集まりは，ベクトル OA を法線ベクトルとする，直線（3次元の場合は，平面）となっている。

E^2 における左の図でベクトル $\overrightarrow{OA}$ とベクトル $\overrightarrow{OB}$ の内積を求めよ。ただし，OH と AH の長さはそれぞれ 2 と 3 とする。つまり，ベクトル $\overrightarrow{OA}$ の大きさは 5 である。

答えは：5×2＝10，前の例からも分かる。高等学校で学習する，もう一つの内積の定義からも分かる。

$$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=\|\overrightarrow{OA}\|\times\|\overrightarrow{OB}\|\times\cos\theta$$
$$=\|\overrightarrow{OA}\|\times\|\overrightarrow{OB}\|\times\frac{\overline{OH}}{\|\overrightarrow{OB}\|}$$
$$=\|\overrightarrow{OA}\|\times\overline{OH}$$

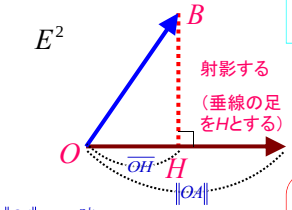
$\|\overrightarrow{OA}\|$ は，ベクトル $\overrightarrow{OA}$ の大きさを表し，$\overline{OH}$ は，軸ＯＡに関するＨの座標を表す。

数直線上で A とは反対側に H がある場合は負となる。

内積の考え方に基づいたベクトルの正射影

ベクトルの正射影の考え方

ベクトルOAとOBの内積は，一方のベクトルを他方へ正射影して，数直線上の数の掛け算と同じように計算することで得られる。



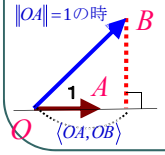
左の図のような場合には，

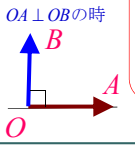
$\langle OA,OB\rangle = \|OA\|\times\overline{OH}$

と考える。

特に，ベクトルOAの大きさが1の場合の内積の値は軸OAに関するHの座標になる。

$\langle OA,OB\rangle = \overline{OH}$

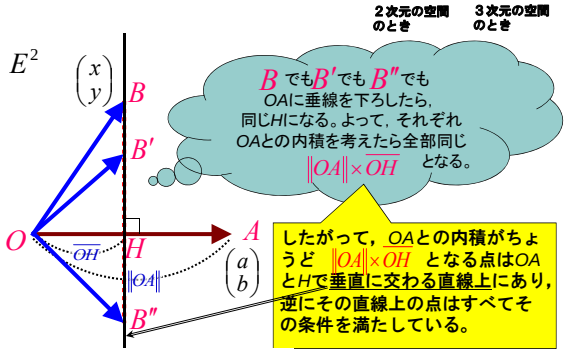




点Bを直線OA上へ射影した時，原点に重なる（OAとOBが直交）場合，$\overline{OH}$ の値がゼロとなるので，内積の値は0となる。つまり，直交する2つのベクトルの内積は0となる。

$\langle OA,OB\rangle = 0$

内積が一定になる点の軌跡＝直線や平面

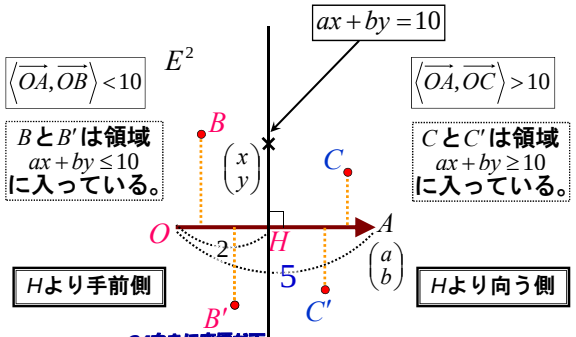


したがって，OAとの内積がちょうど $\|OA\|\times\overline{OH}$ となる点はOAとHで垂直に交わる直線上にあり，逆にその直線上の点はすべてその条件を満たしている。

点Aの座標を(a,b)，直線上の点の座標を(x,y)とすればこの直線の方程式は右のようになる。

$ax+by=\|OA\|\times\overline{OH}$

一次不等式の見方



B と B' は領域 $ax+by\le 10$ に入っている。

C と C' は領域 $ax+by\ge 10$ に入っている。

Hより手前側

Hより向う側

OA向きに座標が正

今は，右にベクトルAを描いているが，左を向いていたら，そのベクトルの向きに座標の値を正の数値とすることに注意しよう。

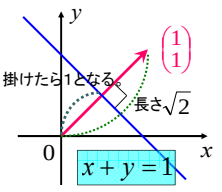
具体例（1） 内積による一次式表現

一次方程式

$x+y=1 \Leftrightarrow \left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle=1$

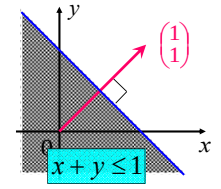
大きさは $\sqrt{2}$

このベクトルを法線ベクトルと呼ぶ。



一次不等式

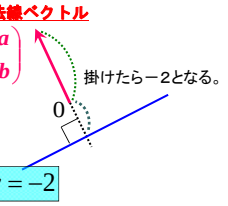
$x+y\le 1 \Leftrightarrow \left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle\le 1$



具体例(1) 続き

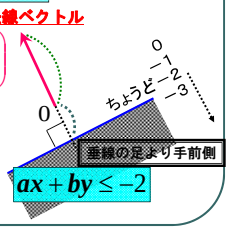
一次方程式

$ax+by=-2 \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = -2$



一次不等式

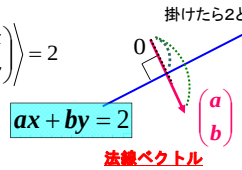
$ax+by \le -2 \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \le -2$



具体例(1) 続き

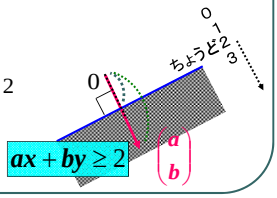
一次方程式

$ax+by=2 \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = 2$



一次不等式

$ax+by \ge 2 \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \ge 2$



数ベクトル空間とユークリッド空間

n 個の実数の組 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を n 次元数ベクトルという。

その全体を n 次元数ベクトル空間といい，$\mathbf{R}^n$ で表す。

特に，直交するように**座標**を選んだ場合，２つのベクトル $x=(x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}$ と $y=(y_1,\ldots,y_n)^{\mathrm{T}}$ に対して，次のような関数が定義でき，n 次元**ユークリッド空間**といい，E^n で表す。 **「x と y の内積」**

Euclidean space

$$\langle x,y\rangle := \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

(1)自分自身との内積 $\langle x,x\rangle \ge 0$
(2) $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$ (ゼロベクトル)
(3) $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$
(4) $\langle cx,y\rangle = c\langle x,y\rangle$
(5) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

すると，これは自然に**内積の公理**を満足するので，**内積の一次式表現**とも呼んでいる（**線形形式，双線形形式**または**一次形式**ともいう）。

ベクトルは通常，成分を縦に並べるので，横に表示する時は転置記号Tを付ける。

一次方程式と一次不等式のとらえ方

一次方程式

$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=c \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle = c$

法線ベクトル $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n)^{\mathrm{T}}$ との**内積が一定の値** c である点 $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}$ の集まり。とくに，法線ベクトルがゼロベクトルでなければ，これを**超平面(hyperplane)**と呼ぶ。超平面は，法線ベクトルが張る1次元の部分空間の直交補空間を平行移動したもので，次元が *n-1* となる。

一次不等式

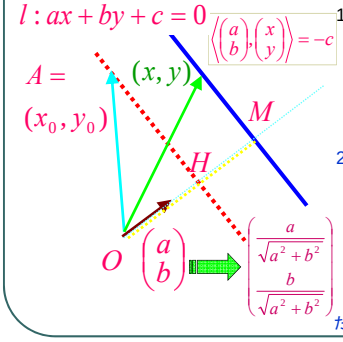
$a_1x_1+\cdots+a_nx_n \le c \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle \le c$

法線ベクトル $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n)^{\mathrm{T}}$ との**内積が一定の値** c **以下**である点 $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}$ の集まり。これを**半空間(half space)**と呼ぶ。

具体例(2) 点と直線の距離

直線 $l: ax+by+c=0$ と点 (x_0,y_0) との距離は，公式として覚える必要はない。

$l: ax+by+c=0$ $\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = -c$



1. 法線ベクトルの大きさを１にするように正規化する。

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$

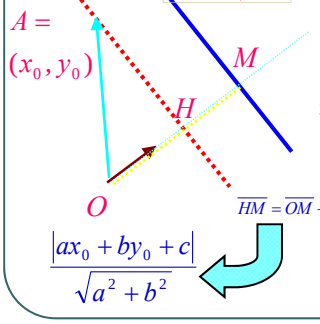
2. **原点から直線までの符号付の距離（Mの座標）**は以下で表される。

$$\overline{OM} = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle$$

ただし，点(x,y) は直線上の任意でよい。

具体例(2) 点と直線の距離 （続き）

$l: ax+by+c=0$ $\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = -c$



$$\overline{OM} = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

3. 点Aと直線lの距離は，HとMの座標間の距離に等しい。

$$\overline{HM} = \overline{OM} - \overline{OH} = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}} - \left\langle \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

コーシー・シュワルツ

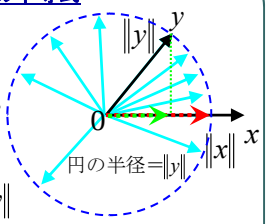
具体例(3) Cauchy-Schwarzの不等式

$$-\|x\|\|y\| \le \langle x, y\rangle \le \|x\|\|y\|$$

ベクトル x と y が一次従属のとき，またそのときに限りどちらかの等号が成立する。

‖ ‖ はベクトルのノルム（大きさ）を表し，内積表現を使うと，**自分自身との内積**の正の平方根に等しい。

$$\langle x, y\rangle \le \|x\|\|y\|$$

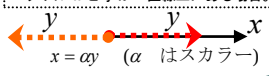


ベクトル x と y の内積は、ベクトルの座標とベクトルの座標との掛け算

ノルム ‖x‖と ‖y ‖の積は、線分と線分の長さの掛け算

ベクトル x と y が一次従属のとき，またそのときに限りどちらかの等号が成立する。

ベクトル x と y が一直線上にある場合。



コーシー・シュワルツの不等式

Cauchy-Schwarz

$$-\|x\|\|y\| \le \langle x, y\rangle \le \|x\|\|y\|$$

ベクトルx と y が一次従属の時，またそのときに限りどちらかの等号が成立する。

絶対値を使って表すと，

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|$$

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ の時，成分で表すと，

$$|x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n| \le \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

両辺を二乗すると，

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$$

$$\|x\| := \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

（自分自身との内積の正の平方根）

$$(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^2 \le (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2)$$

n=2 の時，高等学校でも不等式の証明の単元で学習している。

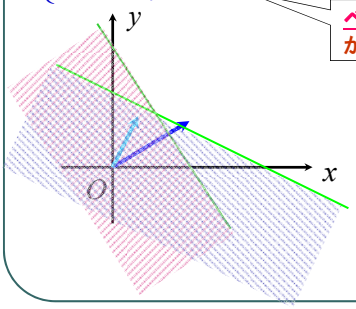
$$(ax + by)^2 \le (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

具体例(4)連立一次不等式の内積による解釈

$$\begin{cases} 3x + 2y \le 12 \\ x + 2y \le 8 \end{cases}$$

ベクトル(3,2)との内積が12以下となる半空間

ベクトル(1,2)との内積が8以下となる半空間



一般の最適化問題(数理計画問題)

目的関数　$f(\mathbf{x})$ ⟶ 最小化

制約条件　$g_1(\mathbf{x}) \le \mathbf{0}, \ldots, g_m(\mathbf{x}) \le \mathbf{0}$

$h_1(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \ldots, h_l(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

$\mathbf{x} \in X$

このような問題を数理計画問題といい，解を求める手法を数理計画法という。関数 *f*, *g*, *h* が一次式であるとき線形計画といい，そうでないとき，非線形計画といいます。線形の場合は，有名なシンプレックス法や内点法でおおむね解けています。

$\mathbf{x} \in S$ 実行可能領域 Feasible region

線形計画問題

(Linear Programming Problem)

目的関数　$x + y$ ⟶ 最大化

制約条件

$$3x + 2y \le 12$$
$$x + 2y \le 8$$
$$x \ge 0, y \ge 0$$

※　この問題は**一次方程式や一次不等式で表現される制約条件と一次式で表される目的関数**からなっている数理計画問題なので，「**線形計画問題**」と呼ばれる。この研究は，**1947年**に**線形計画法**として**ダンツィク**により始められた。その後，**クーン**と**タッカー**により**非線形計画法**が研究され，それが**凸解析学**へと発展してゆく。

⇒ このような問題を考えるには，**内積の線形表現** が重要になってくる。