

グラフとネットワーク理論
(110S1039) 確認テスト 2

学 年	在籍番号	氏 名	
年		解答例	

1 次の線形計画問題について，以下の各問いに答えよ。(20 点)

$$\begin{aligned}
 (\text{LP}) \quad & \text{Minimize} && -3x_1 && -x_2 && -3x_3 \\
 & \text{subject to} && 2x_1 && +x_2 && +x_3 \leq 2 \\
 & && x_1 && +2x_2 && +3x_3 \leq 5 \\
 & && 2x_1 && +2x_2 && +x_3 \leq 6 \\
 & && x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.
 \end{aligned}$$

- (1) スラック変数を使って，問題 (LP) を標準形に直せ。
- (2) (1) の標準形問題の基底解は全部でいくつあるか述べよ。また，実行可能基底解を一つ求めよ。
- (3) 問題 (LP) を行列とベクトルを使って表せ。どのように置き直したかをちゃんと書け。

《解答例》

(1) スラック変数 x_4, x_5, x_6 を使って，次のような標準形に変形する。

$$\begin{aligned}
 (\text{P}) \quad & \text{Minimize} && -3x_1 && -x_2 && -3x_3 && +0x_4 && +0x_5 && +0x_6 \\
 & \text{subject to} && 2x_1 && +x_2 && +x_3 && +x_4 && && = 2 \\
 & && x_1 && +2x_2 && +3x_3 && && +x_5 && = 5 \\
 & && 2x_1 && +2x_2 && +x_3 && && && +x_6 = 6 \\
 & && x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0.
 \end{aligned}$$

- (2) 上記の標準形問題 (P) は，どの 3 つの列ベクトルを選んでも一次独立になっているので，その選び方は，6 つの内から 3 つ選ぶ組み合わせとなる。よって，

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 (\text{個})$$

等式の制約条件の右辺の第 4, 5, 6 列目が基底行列になっているので， x_4, x_5, x_6 を基底変数， x_1, x_2, x_3 を非基底変数とすれば，次のような実行可能基底解が求まる。

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T = (0, 0, 0, 2, 5, 6)^T$$

他に，次のものも実行可能基底解になる。

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T = (1, 0, 0, 0, 4, 4)^T$$

- (3) 最初の問題 (LP) については

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

とおくと，次のように表せる。

$$\text{Minimize } c^T x \text{ subject to } Ax \leq b, x \geq 0.$$