

16 複素フーリエ級数 (周期 2π の場合)

実数 x, y と $i^2 = -1$ となる新しい数 i に対して, $x + yi$ を複素数といい, i を虚数単位という。 $z = x + yi$ において複素変数 z の関数 $f(z)$ を考える。実数から実数への関数を 実変数 実数値関数 とよび, 複素数から複素数への関数を 複素変数 複素数値関数 とよび, 単に, 複素関数 ともいう。

複素数の四則演算は, $i^2 = -1$ と扱うことで, 実数の計算とすべて同じになる。そこで, 微分積分学で扱ったテイラー展開を利用すると,

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

となるので, 最初の, e^x の両辺の x を ix に形式的に置き換えてみると,

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + (ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(ix)^n + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots\right) + i \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots\right) \end{aligned}$$

となるので, 結局, オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ が成立する。ここで, x に θ と $-\theta$ を代入すると, $\begin{cases} e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \\ e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \end{cases}$ となり, 従って,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad (1)$$

となる。実数 a_n と b_n について, n を非負の整数, x を実変数とすると, (1) から

$$\begin{aligned} a_n \cos nx + b_n \sin nx &= a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \\ &= \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \\ &= \left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right) e^{inx} + \overline{\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)} e^{-inx} \end{aligned} \quad (2)$$

となる。従って,

$$c_n := \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} := \overline{c_n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad c_0 := \frac{a_0}{2}$$

とすると, (2) は次のようになる。

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} \quad (3)$$

さて, $[-\pi, \pi]$ で積分可能な周期 2π の周期関数 $f(t)$ が与えられた時, 関数 $f(t)$ をフーリエ級数展開すると次のような三角級数であった。

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

ただし, それぞれのフーリエ係数は次のとおりであった。

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt \quad (n = 1, 2, \dots) \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

これらを複素数と (3) を使って表すと, 次のようになる。

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \quad (4)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (5)$$

この (4) を $f(t)$ の複素フーリエ級数といい, (5) を $f(t)$ の複素フーリエ係数という。

レポート問題 3

周期が 2π の関数 $f(x) = x$ ($-\pi < x < \pi$) の複素フーリエ級数を求めよ。

17 複素フーリエ級数 (周期 $2T$ の場合)

これまでは周期が 2π の周期関数について考えてきたが, もっと一般の周期が $2T$ の場合 (角周波数を ω とすると, $2T = 2\pi/\omega$) ²¹ について考察してみる。ここでは, $f(x) \sim$ の記号の代わりに, $f(x) =$ を使用する。周期が $2T$ である周期関数 $f = f(x)$ については, $f(x+2T) = f(x)$ であるので, 変数変換 $x = \frac{T}{\pi}t$ (つまり, $t = \frac{\pi}{T}x$) によって

$$f\left(\frac{T}{\pi}(t+2\pi)\right) = f\left(\frac{T}{\pi}t + 2T\right) = f\left(\frac{T}{\pi}t\right)$$

となり, 関数 $t \mapsto f\left(\frac{T}{\pi}t\right)$ は周期 2π を持つ周期関数となる。よって, その複素フーリエ級数は次のようになる。

$$\begin{aligned} f\left(\frac{T}{\pi}t\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \\ x = \frac{T}{\pi}t \text{ と変数変換すると, つまり } t = \frac{\pi}{T}x \text{ を代入して,} \\ f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\left(\frac{\pi}{T}\right)x} \\ \text{ただし, } c_n &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) e^{-in\left(\frac{\pi}{T}\right)x} dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned} \quad (6)$$

²¹ 区間の取り方は, 周期が $2T$ であれば, $[-T, T]$ の代わりに $[0, 2T]$ でも構わない。