

15 フーリエ級数展開 (周期 $2T$ の場合)

これまでは周期が 2π の周期関数について考えてきたが, もっと一般の周期が $2T$ の場合 (角周波数を ω とすると, $2T = 2\pi/\omega$)²⁰ について考察してみる。ここでは, $f(x) \sim$ の記号の代わりに, $f(x) =$ を使用する。周期が $2T$ である周期関数 $f = f(x)$ については, $f(x+2T) = f(x)$ であるので, 変数変換 $x = \frac{T}{\pi}t$ (つまり, $t = \frac{\pi}{T}x$) によって

$$f\left(\frac{T}{\pi}(t+2\pi)\right) = f\left(\frac{T}{\pi}t + 2T\right) = f\left(\frac{T}{\pi}t\right)$$

となり, 関数 $t \mapsto f\left(\frac{T}{\pi}t\right)$ は周期 2π を持つ周期関数となる。よって, そのフーリエ級数展開は次のようになる。

$$\begin{aligned} f\left(\frac{T}{\pi}t\right) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \\ x = \frac{T}{\pi}t \text{ と変数変換すると, つまり } t = \frac{\pi}{T}x \text{ を代入して,} \\ f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{T}x + b_n \sin \frac{n\pi}{T}x \right) \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) dx \\ a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos \frac{n\pi}{T}x dx \quad (n = 1, 2, \dots) \\ b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \sin \frac{n\pi}{T}x dx \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

²⁰ 区間の取り方は, 周期が $2T$ であれば, $[-T, T]$ の代わりに $[0, 2T]$ でも構わない。

第 10 回目の練習問題のグラフによる解釈

練習問題

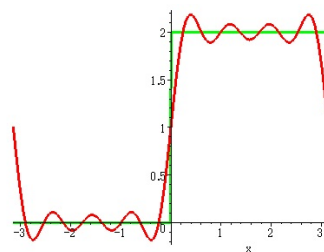
周期が 2π である次の関数 $f(x)$ をフーリエ級数展開せよ。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi < x < 0) \\ 1 & (x = 0) \\ 2 & (0 < x < \pi) \\ 1 & (x = \pi) \end{cases}$$

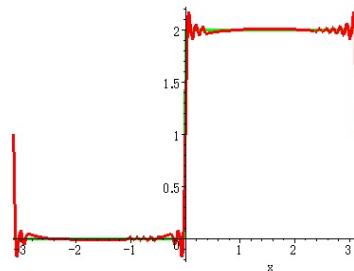
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 2$$

$$a_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt \\ &= \begin{cases} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{n} & (n = 1, 3, \dots, 2k-1, \dots); \\ 0 & (n = 2, 4, \dots, 2k, \dots) \end{cases} \end{aligned}$$



$n = 8$ までの展開



$n = 50$ までの展開

$$\begin{aligned} f(x) &\sim 1 + \frac{4}{\pi} \left\{ \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x \right\} \\ &\sim 1 + \frac{4}{\pi} \left\{ \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \cdots + \frac{1}{49} \sin 49x \right\} \end{aligned}$$