12　内積空間での正規直交系

n 次元のユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ において，2 つのベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ と $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$ に対して，$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle := \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ とおくとこれは $\boldsymbol{R}^n$ 上の内積となる。（内積の定義されたベクトル空間を内積空間と呼ぶ。）内積の性質（内積の公理）から，**「自分自身との内積は非負になる」**ので，その正の平方根が計算できる。従って，ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，$\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$ が定義できるので，これを $\boldsymbol{x}$ の**大きさ（ノルム）**[18] と呼ぶ。特に，$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$ となるとき，ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は直交するという。今，$\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n}$ のベクトルが互いに直交し，かつ大きさが 1 となるとき，すなわち

$$\langle \boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_j} \rangle = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \tag{1}$$

であるとき，$\{\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n}\}$ は**正規直交系**と呼ばれる。線形代数学で学習した，Gram-Schmidt の直交化法は,「与えられた一次独立なベクトルの集合から正規直交系を構成する」アルゴリズムであり，一意ではないかもしれないが，正規直交系が必ず構成できることを示している。

13　関数空間での正規直交基底（完全正規直交系）

n 次元の内積空間 V の正規直交系 $\{\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n}\}$ が V の基底となっているとき，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ は次のように表せる。

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e_i} \rangle \, \boldsymbol{e_i}$$

これは，力のベクトルを分解するのとまったく同じで，ベクトルを与えられた直交座標に分解して座標を求めることを意味する。任意のベクトルは基底のベクトルの一次結合で表現でき，その係数が内積を計算することで決定されるのが容易に分かる。このように内積空間（ベクトル空間）の基底で正規直交系となっているものを**正規直交基底**あるいは**完全正規直交系**と呼ぶ。

同様に考えて無限次元の関数空間（内積空間）においても任意のベクトルを与えられた直交座標に分解して座標を求めることを考えてみよう。例えば，完全正規直交系を $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots\}$ とするとき，どんな性質を持ったベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ ならば，次のように分解表示できるだろうか。

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e_k} \rangle \, \boldsymbol{e_k}$$

まず始めに，実数空間 $\boldsymbol{R}$ で定義された周期関数を三角関数の和で表現するフーリエ級数について考えてみよう。区間 $[-\pi, \pi]$ 上の実数値連続関数全体[19]を $C[-\pi, \pi]$ と表し，$f, g \in C[-\pi, \pi]$ に対

[18]実際に，次の **ノルムの公理** が満たされている。(3) は Cauchy-Schwarz の不等式から証明できる。

(1) すべての $\boldsymbol{x}$ について，$\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ が成り立ち，特に $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 0$

(2) すべての $\boldsymbol{x}$ と α について，$\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{x}\|$

(3) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$

[19]フーリエ級数展開を考える時には，区間 $[-\pi, \pi]$ 上で**積分可能な周期関数**（$f(t) = f(t + 2\pi)$ がすべての t について成立する関数）で，**区分的に連続な関数**で，その導関数も区分的に連続であれば十分である。区分的に連続であるとは，有限個の点を除けば，連続であり，それぞれ右側極限と左側極限が存在することを意味する。また，区間の取り方も，周期が 2π であれば，$[-\pi, \pi]$ の代わりに $[0, 2\pi]$ でも構わない。

して，その和を $(f+g)(t) := f(t)+g(t)$ でスカラー倍を $(\alpha f)(t) := \alpha f(t)$ で定義すると $C[-\pi,\pi]$ は実ベクトル空間になる。さらに，$f, g \in C[-\pi,\pi]$ に対して

$$\langle f, g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$$

と定義すると，$\langle f, g\rangle$ は f と g の内積となるので，$C[-\pi,\pi]$ は内積空間となっている。すると，区間 $[-\pi,\pi]$ で定義された次の関数系が正規直交系となっている（証明せよ）。

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt, \ldots$$

（ヒント：加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

を使うと割と簡単に計算できる。例えば,

$$\cos(kt)\cos(jt) = \frac{1}{2}\Bigl(\cos(k+j)t + \cos(k-j)t\Bigr)$$

が成立するので，$k=j$ の時と，$k \neq j$ の時に分けて計算すると,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos kt\, dt = \pi \quad と \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos jt\, dt = 0 \quad (k \neq j)$$

が求まる。）

実際，右のようにそれぞれの関数を記号で表すと,

$$S := \{\boldsymbol{e_0}, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e_{2n-1}}, \boldsymbol{e_{2n}}, \ldots\}$$

は，正規直交系となっている（前頁の (1) が成立)。

よって，上のベクトルの集合 S から生成されるベクトル空間は，$C[-\pi,\pi]$ の部分空間となっていて，S を正規直交基底とする。もちろん，S の要素を有限個選んできて，その一次結合で表される関数は，周期関数で連続関数にもなっている。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e_0} &:= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, \\
\boldsymbol{e_1} &:= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t, \\
\boldsymbol{e_2} &:= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t, \\
&\ \vdots \\
\boldsymbol{e_{2n-1}} &:= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt, \\
\boldsymbol{e_{2n}} &:= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt, \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

14 フーリエ級数展開（周期 2π の場合）

前章で，以下の S が $C[-\pi,\pi]$ で正規直交系となっていることが分かった。

$$S := \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt, \ldots\right\}$$

ここで，周期関数である三角関数 cos と sin での級数，すなわち以下の一次結合の形みたいな

$$\begin{aligned}
&\frac{a_0}{2} + a_1\cos t + b_1\sin t + a_2\cos 2t + b_2\sin 2t + \cdots + a_k\cos kt + b_k\sin kt + \cdots \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt)
\end{aligned} \tag{2}$$

となる**三角級数** (trigonometric series) を考える。この級数が収束しているかどうか分からないが，とりあえず，収束してある関数 $f(t)$ となったとしよう。そして，この関数 $f(t)$ が $[-\pi,\pi]$ で積分可能で，この級数が項別積分可能であるとすると，有限次元の内積空間で成立する

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e_i}\rangle\, \boldsymbol{e_i}$$

と同様の結果が成立し，三角級数 (2) の係数について次のことが成立する。

$$
\begin{array}{rcl}
a_0 &=& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt \\
a_1 &=& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos t\,dt \\
b_1 &=& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin t\,dt \\
&\vdots& \\
a_k &=& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt \\
b_k &=& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt \\
&\vdots&
\end{array}
$$

このとき，三角級数の係数

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

を $f(t)$ の**フーリエ係数** (Fourier coefficient) といい，この係数を持つ三角級数 (2) を**フーリエ級数** (Fourier series) と呼んでいる。

一般には，$[-\pi, \pi]$ で積分可能な周期関数 $f(t)$ が与えられた時，この関数 $f(t)$ からフーリエ係数を計算してフーリエ級数を求めるのである。しかし，この級数が元の関数 $f(t)$ と等しいかどうかは分からない。従って，次のように書いて，関数 $f(t)$ を**フーリエ級数展開**するという。

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

実は，次の定理が成立する。

定理 1. 2π の周期を持つ実数値関数 $f(x)$ が，区間 $[-\pi, \pi]$ で区分的に連続で，さらに，その導関数 $f'(x)$ も区分的に連続ならば， $f(x)$ のフーリエ級数は，

> $f(x)$ が連続な点 x で $f(x)$ に収束し，
> $f(x)$ が不連続な点 x で $\dfrac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$ に収束する。

ここで，$f(x+0) := \lim_{t\downarrow x} f(t)$ は $f(t)$ の x の大きいほうから x に近づけた極限値であり，$f(x-0) := \lim_{t\uparrow x} f(t)$ は $f(t)$ の x の小さいほうから x に近づけた極限値である。

練習問題

周期が 2π である次の関数 $f(x)$ をフーリエ級数展開せよ。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi < x < 0) \\ 1 & (x = 0) \\ 3 & (0 < x < \pi) \\ 1 & (x = \pi) \end{cases}$$

レポート問題 2

周期が 2π である次の関数 $f(x)$ をフーリエ級数展開せよ。

$$f(x) = \begin{cases} x & (-\pi < x < \pi) \\ 0 & (x = \pi) \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{前のページの練習問題の解答}}$

本来は，広義積分

$$\text{（例）}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0}\int_{-\pi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(t)\,dt$$

を必要とするが，省略して書くと，それぞれのフーリエ係数は以下のように計算される。

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{\pi} 3\,dt\right\} = 3$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 3\cos nt\,dt = \frac{3}{\pi}\left[\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 3\sin nt\,dt = \frac{3}{\pi}\left[\frac{-\cos nt}{n}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{3}{n\pi}(-\cos n\pi + 1) \\ &= \frac{3}{n\pi}\left\{(-1)^{n-1} + 1\right\} = \begin{cases} \dfrac{6}{\pi}\cdot\dfrac{1}{n} & (n = 1, 3, \ldots, 2k-1, \ldots) \\ 0 & (n = 2, 4, \ldots, 2k, \ldots) \end{cases} \end{aligned}$$

となるので，$f(x)$ のフーリエ級数展開は

$$f(x) \sim 1 + \frac{6}{\pi}\left\{\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots + \frac{1}{(2k-1)}\sin(2k-1)x + \cdots\right\}$$

となる。