

9 数ベクトル空間とユークリッド空間

n 個の実数の組 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を n 次元数ベクトル (vector) という。 n 次元数ベクトルの全体を n 次元ベクトル空間 (vector space) といい、 R^n で表す。 R^n は、(実)ベクトル空間の公理を満たすのでこのように呼ばれる。 n 次元数ベクトルを表すのに、転置記号を使って、 $(x_1, \dots, x_n)^T$ と表し、転置記号を省略することもある。また、 n 次元数ベクトル $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ と $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ に対して、次の式が以下の内積の公理を満たすので x と y の内積 (inner product) と呼ばれ、 $\langle x, y \rangle$ (または、 $(x|y)$, $x^T y$) と表す。確かに、基底を正規直交系に選べば、そのように表されるし、逆にそのように表されているときは、正規直交基底を選んでいることになる。そこで、そのようなベクトル空間をユークリッド空間といい、 $\mathbb{E}$ で表すこともある。また、内積の定義されたベクトル空間を一般に内積空間と呼ぶ。

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \quad \left(= \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)$$

内積の公理

- (1) すべての x について、 $\langle x, x \rangle \geq 0$ が成り立ち、特に $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (2) すべての x, y, z について、 $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- (3) すべての x, y と α について、 $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- (4) すべての x, y について、 $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (実ベクトル空間のとき)

よって、 n 次元数ベクトル x に対して、 x の大きさ $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ (つまり、 $\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$) が定義できて、ノルムの公理を満たす。ノルムの定義されたベクトル空間を一般にノルム空間と呼ぶ。また、次のような不等式が内積空間では成立する。

コーシー・シュワルツの不等式

ベクトル空間 X における2つのベクトル $x, y \in X$ に対して、

$$-\|x\|\|y\| \leq \langle x, y \rangle \leq \|x\|\|y\|, \quad (\text{つまり } |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|)$$

が成り立つ。ただし、ここでは $|\cdot|$ は絶対値を表す記号である。等号が成立するのは、 x と y が一次従属になるときに限る。

10 ベクトル空間としての関数空間

「関数と関数の和」を「その各変数での関数の値の和」として定義すると、別の関数を構成することができる。また、「関数の定数倍したもの」もまたある関数になっている。この事実をベクトル空間の言葉で記述すると、関数の一つひとつが、あるベクトル空間のベクトルとなっていることを意味する。このようなベクトル空間を関数空間と呼ぶ。通常は、条件を色々つけて、元になるベクトル空間の部分空間 (subspace) を考えることが多い。例えば、次

のような連続関数の空間は、「連続関数と連続関数の和はまた連続関数になる」とことと「連続関数の定数倍もまた連続関数になる」という事実から先の関数空間の部分空間として考えることができる。他に、偶関数全体、奇関数全体、微分可能な関数全体などがある。

実数空間 R で定義された区間 $[-\pi, \pi]$ 上の実数値連続関数全体を $C[-\pi, \pi]$ と表し、 $f, g \in C[-\pi, \pi]$ に対して、その和を $(f + g)(t) := f(t) + g(t)$ でスカラー倍を $(\alpha f)(t) := \alpha f(t)$ で定義すると $C[-\pi, \pi]$ は実ベクトル空間になる。さらに、 $f, g \in C[-\pi, \pi]$ に対して

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$$

と定義すると、 $\langle f, g \rangle$ は f と g の 内積 となるので、 $C[-\pi, \pi]$ は内積空間となる。

11 関数空間での一次独立性

ベクトル空間では、直接、一次独立性（いくつかのベクトルの集まりにおいて、どのベクトルも他の残りのベクトルの一次結合で表現できない時）を確かめることも可能である。しかし、上記で考えたように、連続関数全体の空間に積分による内積が導入できるので、内積を利用したベクトルの一次独立性をチェックすることができる。つまり、

零ベクトルでないベクトル $a_1, a_2, \dots, a_n$ が互いに直交する時、それらが一次独立であること

に基づいて、 $\langle a_i, a_i \rangle \neq 0$ かつ $\langle a_i, a_j \rangle = 0$ ($i \neq j$) を示して、 $a_1, a_2, \dots, a_n$ が一次独立であることが証明される。

波の干渉における「重ね合わせの原理」と「独立性」は、関数空間での正弦波信号をモデルにするとうまく説明がつく。

レポート問題 1 波動の独立性を実際に、振幅が1で周期の異なる、例えば、下の表のような、角周波数が $\omega = 1, 2, \dots, n$ の n 個の単振動を考えることにより示せ。

具体的には、それらの単振動が互いに一次独立になっていることを内積による直交性により確かめよ。つまり、各 $k = 1, \dots, n$ について、 $x_k = x_k(t)$ が

$$\langle x_k, x_k \rangle \neq 0$$

かつ

$$\langle x_k, x_m \rangle = 0 \quad (k \neq m)$$

を満たすことを示せばよい。

角周波数 (ω)	周期 ($T = 2\pi/\omega$)	単振動
$\omega = 1$	$T = 2\pi$	$x_1(t) = \sin t$
$\omega = 2$	$T = \pi$	$x_2(t) = \sin 2t$
$\omega = 3$	$T = \frac{2\pi}{3}$	$x_3(t) = \sin 3t$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\omega = n$	$T = \frac{2\pi}{n}$	$x_n(t) = \sin nt$