3　色光の定量的表現と各表色系による表現

3.1　色光の定量的表現

(1) 白色光による単位明度係数の決定
白色光として分光密度が可視波長域に渡って一定であるもの（基礎刺激と呼ぶ）を選び，原刺激 $\vec{R}$，$\vec{G}$，$\vec{B}$ を加法混色してこの基礎刺激 $\vec{C_W}$ を等色した時の各原刺激の輝度（明度係数と呼ぶ）を l_R, l_G, l_B とします。つまり，l_R, l_G, l_B を明度係数として

$$\vec{C_W} = l_R\vec{R} + l_G\vec{G} + l_B\vec{B}$$

と表され，$\boldsymbol{e}_1 := l_R\vec{R}$，$\boldsymbol{e}_2 := l_G\vec{G}$，　$\boldsymbol{e}_3 := l_B\vec{B}$ とするとき，これら $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ を色光の基底とすることができます。このとき，l_R, l_G, l_B は，原刺激 $\vec{R}$，$\vec{G}$，$\vec{B}$ の1単位と考えることができるのです。

(2) 任意の色光 $\vec{C}$ の座標表示
ある色光を等色したとき，その各原刺激の輝度を L_R, L_G, L_B とすると，次のように表されます。

$$\begin{aligned}
\vec{C} &= L_R\vec{R} + L_G\vec{G} + L_B\vec{B} \\
&= \frac{L_R}{l_R}l_R\vec{R} + \frac{L_G}{l_G}l_G\vec{G} + \frac{L_B}{l_B}l_B\vec{B} \\
&= R\boldsymbol{e}_1 + G\boldsymbol{e}_2 + B\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} \\
& \left(\text{ただし}, R = \frac{L_R}{l_R}, G = \frac{L_G}{l_G}, B = \frac{L_B}{l_B} \text{とおきます。}\right)
\end{aligned}$$

(3) (2) での色光 $\vec{C}$ の輝度 L_C
グラスマンの法則 (4) により，次のようになります。

$$L_C = L_R + L_G + L_B = (l_R R) + (l_G G) + (l_B B)$$

(4) 任意の色光 $\vec{C}$ の3次元空間表示
(1), (2) で考えたように，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ を色光の基底として選ぶことで色光の3次元空間表示が可能となります。つまり，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ を3次元のユークリッド空間 R^3 の基本ベクトル $(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T$ と同一視して考えると，任意の色光 $\vec{C}$ はこれらの一次結合となり，3次元のユークリッド空間のベクトルとして表現することができるのです。そのときの座標は，$(R, G, B)^T$ となります。ここで，^{T} という記号は，行列の転置記号を表します。

実際に色光を再現する際には,「一次結合」の変わりに「**非負一次結合**」でしか実現できませんので，再現可能な色がなるべく多くなるように色光の基底を選ぶ必要があります。実は，光の三原色の赤，緑，青はこの条件を満足するようになっています。

(5) 単位面の決定と色三角形
(4) で考えた3次元のユークリッド空間 R^3 の基本ベクトル $(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T$（の終点）を通る平面を H とすると，H は次のような集合となります。

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x + y + z = 1 \right\}$$

なぜでしょうか？また，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

なので，これは先の基本ベクトルの特別な一次結合（その係数の和が 1 となる）で，**アフィン結合 (affine combination)** と呼ばれています。H はそのような基本ベクトルのアフィン結合全体からできていて，$(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T$ の**アフィン包 (affine hull)** と呼ばれています。２点の場合は，その２点を通る直線となります。

さらに，上記の H の部分集合で，その基本ベクトルの頂点を結んでできる三角形は次のような集合となっています。これを**「色三角形」**と呼んでいます。

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x+y+z=1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \right\}$$

ただし，各アフィン結合は，その係数の和が 1 となるだけでなく，すべての係数が非負である必要があります。このような特別なアフィン結合を $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$, $(0,0,1)^T$ の**凸結合 (convex combination)** と呼んでいて，その凸結合全体の集合は，$(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$, $(0,0,1)^T$ の**凸包 (convex hull)** と呼ばれています。２点の場合は，その２点を結ぶ線分となります。

(6) 任意の色光 $\vec{C}$ の色三角形中での表現

色光 $\vec{C} = (R,G,B)^T$ が単位面 H を貫く点が色三角形上にあるとき，この交点を C_0 とすると，点 C_0 の座標は,

$$C_0 = \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R/(R+G+B) \\ G/(R+G+B) \\ B/(R+G+B) \end{pmatrix}$$

で表されます。なぜでしょうか？

【理由】

ベクトル $\vec{C}$ から張られる１次元の直線と平面 H の交点 $C_0 := (r,g,b)^T$ を求めることを考えると，C_0 は $\vec{C}$ の定数倍（スカラー倍）であると同時に，その座標成分は，$r+g+b=1$, $r \geq 0$, $g \geq 0$, $b \geq 0$ を満足しなければならない。従って，$C_0 = t\vec{C}$ と考えると，$(r,g,b)^T = t(R,G,B)^T$ となり，$r+g+b=1$ であることから $t(R+G+B)=1$，つまり $t = 1/(R+G+B)$ となる。

特に，色三角形の高さを１とすると，C_0 から３辺までのそれぞれの長さは，b, r, g に一致します。

【理由】（この証明を完成させてレポートで提出。）

まず，頂点 $\boldsymbol{e_1}$ と $\boldsymbol{e_2}$ を結ぶ直線（辺）を l_1 とすると，l_1 はその２点のアフィン包となるので,

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ 1-a \\ 0 \end{pmatrix} \middle| a \in R \right\}$$

と表される。そこで，点 C_0 から辺 l_1 までの距離を x とすると,

$$\begin{aligned} x &= \min_{0 \leq a \leq 1} \sqrt{(a-r)^2 + (1-a-g)^2 + b^2} \\ x^2 &= \min_{0 \leq a \leq 1} \left((a-r)^2 + (1-a-g)^2 + b^2\right) \\ &= \frac{3}{2}b^2 \end{aligned}$$

となり，結局，$x=\sqrt{\frac{3}{2}}b$ となる。同様にして，頂点 $\boldsymbol{e_2}$ と $\boldsymbol{e_3}$ を結ぶ直線（辺）を l_2，頂点 $\boldsymbol{e_3}$ と $\boldsymbol{e_1}$ を結ぶ直線（辺）を l_3 とし，点 C_0 から辺 l_2，l_3 までの距離を y，z とすると，$y=\sqrt{\frac{3}{2}}r$，$z=\sqrt{\frac{3}{2}}g$ となる。ここで，色三角形の高さを 1 とすれば（つまり，$\sqrt{\frac{2}{3}}$ 倍すると），それぞれの距離は，b, r, g となる。

3.2 色光の各表色系による表現

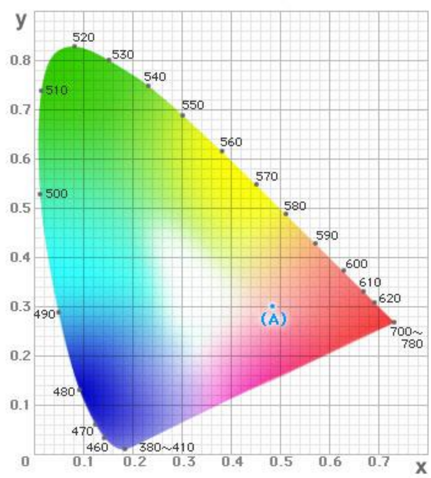
色三角形を RG 平面へ投影すると任意の色光 $\vec{C}$ の座標 $\begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} r \\ g \end{pmatrix}$ と同一視できます。ここで，$b=1-r-g$ となっています。この色三角形を RG 平面へ投影した図形を **色度図** といいます。実際には，光の三原色の赤・緑・青を結ぶ色三角形の内部ではすべての色を再現することは不可能で，下の図のように馬蹄型の領域になることが知られています。

(1) RGB 表色系による色度図
国際照明学会 CIE1931：波長 700.0 nm（赤），546.1 nm（緑），435.8 nm（青）の 3 つの単色光を原刺激として選んだもので，明度係数を

$$l_R : l_G : l_B = 1 : 4.5907 : 0.0601$$

として等エネルギーの各単色光を 2 度の視野（50cm の距離から直径約 1.7cm のものを見る視野）で等色したもの。

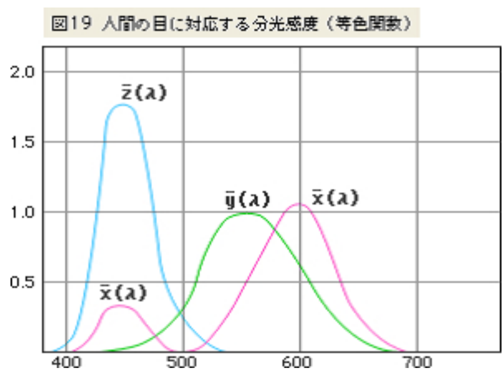
(2) XYZ 表色系による色度図
国際照明学会 CIE1931：座標変換により RGB 表色系の欠点をなくす表色系が提案された。



XYZ 表色系による色度図[3]

等色関数

W.G.Wright と J.Guild の等色実験に基づき，国際照明学会（CIE）で定められた，等エネルギースペクトルに対する目の感度をスペクトル刺激値といい，この感度曲線を等色関数といいます。
つまり，光の波長ごとに等エネルギーの単色光を決められた三原色（原刺激 $\vec{R}$，$\vec{G}$，$\vec{B}$）で等色して得た 3 刺激値のことで，通常，$r(\lambda), g(\lambda), b(\lambda)$ と表され，それぞれ波長 λ の実数値関数になっています。波長は可視光線から選ばれ，$380\mathbf{nm} \leq \lambda \leq 780\mathbf{nm}$ です。



XYZ 表色系による等色関数[4]

[3]色度図は，明るさの情報を犠牲にして 2 つの数値で色を表し，2 次元の図に表現したものを表しています。詳しくは，`http://konicaminolta.jp/instruments/colorknowledge/part1/09.html` を参照してください。
[4]詳しくは，`http://konicaminolta.jp/instruments/colorknowledge/part2/06.html` を参照してください。