内積の見方･考え方

＜内積と線形計画問題＞

最適化数学A
令和7年4月9日（水）3限

新潟大学 理学部　数学プログラム
大学院自然科学研究科 数理物質科学専攻
田 中　　環 (TANAKA, Tamaki)
E-mail:prtana@gs.niigata-u.ac.jp

話の流れ

1. ベクトルの正射影と内積の関係

   ベクトルの内積は一方のベクトルを他方へ正射影して，<u>数直線上の数の掛け算</u>と同じように計算するもの。

2. 一次方程式（超平面）と一次不等式（半空間）

   内積で解釈するのが自然！

3. 線形計画問題の内積による一次式表現

   連立一次不等式の内積による解釈

一次関数と一次不等式

高等学校で習う「一次〇〇〇」や関連したものには，次のようなものがある。

- ◆ 一次関数　$y = ax + b$
- ◆ 一次方程式　$ax + b = 0$
- ◆ 一次不等式　$ax + b < 0$，$ax + b \leq 0$
- ◆ 直線の方程式　$ax + by + c = 0$
- ◆ 平面の方程式　$ax + by + cz + d = 0$
- ◆ 不等式の表す領域　$ax + by + c < 0$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$の関数 $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が，高々それぞれの変数の一次式になっている時，つまり次のような式で表現されているときに，この関数を**一次関数（線形関数）**と呼ぶ。（定数項がないときに線形と呼ぶ）

$$\boxed{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n}$$

特に，二変数の場合には，

$\boxed{f(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2}$ と書いたり $\boxed{f(x, y) = ax + by}$

という表し方を使ったりする。

線形関数の内積による表現

二変数の一次関数（線形関数）の場合を考える。

$$f(x, y) = ax + by$$

この右辺は，座標平面の位置ベクトルの言葉を使うと，2つのベクトル $\vec{n} = (a, b)$ と $\vec{p} = (x, y)$ の<u>内積</u>を表していることが分かる。

$$ax + by = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \vec{n}, \vec{p} \rangle$$

《注釈》通常，高等学校で学ぶ内積の定義は，次のように2通りある。

$$\vec{n} \cdot \vec{p} = |\vec{n}||\vec{p}| \cos \theta \qquad \vec{n} \cdot \vec{p} = ax + by$$

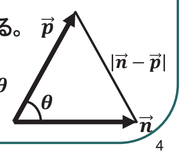
ただし，θ はベクトル $\vec{n}$ と $\vec{p}$ がなす角を表す。

これは，余弦定理（数Ⅰ）により同値であることを学習している。

$$|\vec{n} - \vec{p}|^2 = |\vec{n}|^2 + |\vec{p}|^2 - 2|\vec{n}||\vec{p}| \cos \theta$$

$$(a - x)^2 + (b - y)^2 = a^2 + b^2 + x^2 + y^2 - 2|\vec{n}||\vec{p}| \cos \theta$$

$$\therefore |\vec{n}||\vec{p}| \cos \theta = ax + by$$



内積の計算方法

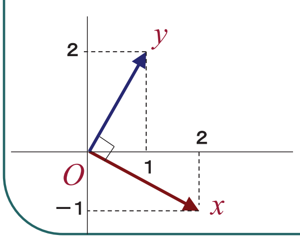
高等学校で学習した，ベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ と $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ の内積は次のようになっていた。

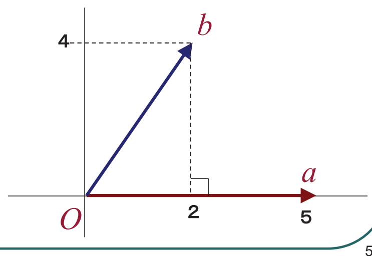
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

例題１

次の2つのベクトルの内積を求めよ。

(1) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$　　(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

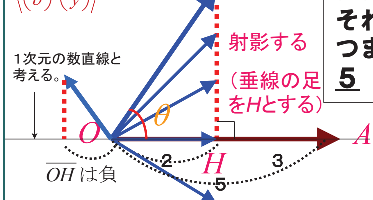




高等学校の数学における内積の考え方

<u>内積の考え方</u>

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = ax + by$$



平面における左の図で２つのベクトル$\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OB}$の内積を求めよ。ただし，OHとAHの長さはそれぞれ ２ と ３ とする。つまり，<u>ベクトル$\overrightarrow{OA}$の大きさは ５</u> である。

答えは：５×２＝１０，前の例からも分かる。高等学校で学習する，もう一つの内積の定義からも分かる。

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \times \cos\theta$$

$$= \|\overrightarrow{OA}\| \times \cancel{\|\overrightarrow{OB}\|} \times \frac{\overline{OH}}{\cancel{\|\overrightarrow{OB}\|}}$$

$$= \|\overrightarrow{OA}\| \times \overline{OH}$$

$\|\overrightarrow{OA}\|$は，ベクトル$\overrightarrow{OA}$ の大きさを表し，$\overline{OH}$は，軸OAに関するHの座標を表す。

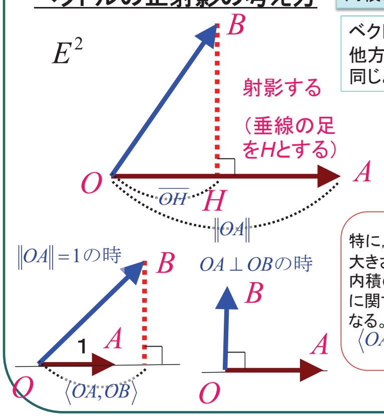
ベクトルOA との内積が一定になる点の集まりは，ベクトルOAを<u>法線ベクトル</u>とする，直線（３次元の場合は，平面）となっている。

数直線上でA とは反対側にHがある場合は負となる。

内積の考え方に基づいたベクトルの正射影

専門書では，ベクトルには矢印記号をつけず，内積はかぎかっこで囲む。

ベクトルの正射影の考え方



ベクトルOAとOBの内積は，一方のベクトルを他方へ正射影して，数直線上の数の掛け算と同じように計算することで得られる。

左の図のような場合には，

$\langle OA,OB\rangle=\|OA\|\times\overline{OH}$

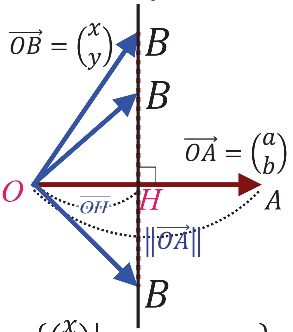
と考える。

特に，ベクトル***OA***の大きさが1の場合の内積の値は軸***OA***に関する***H*の座標**になる。
$\langle OA,OB\rangle=\overline{OH}$

点Bを直線OA上へ正射影した時，原点に重なる（***OA*と*OB*が直交**）場合，$\overline{OH}$の値がゼロとなるので，内積の値は0となる。つまり，直交する2つのベクトルの内積は0となる。
$\langle OA,OB\rangle=0$

一次方程式＝ 内積が一定になる点の集まり

$\boldsymbol{ax+by=d}$



$\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\middle|\, ax+by=d\right\}$

点Aの座標を(a,b)，点Hでベクトル$\overrightarrow{OA}$と垂直に交わる直線上の点の座標を(x,y)とすれば，この直線の方程式は“内積”の考え方を使って，次のように表せる。

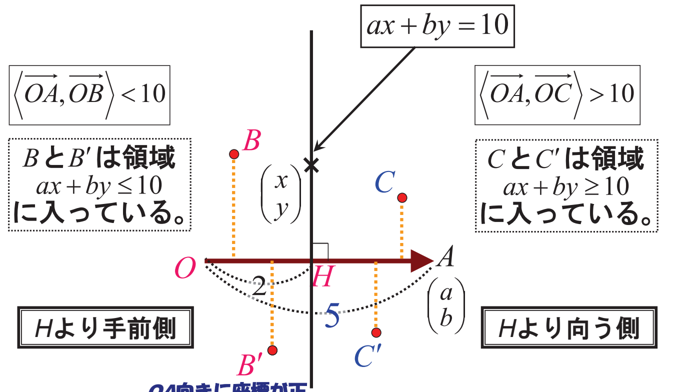
$$\boxed{ax+by=\|\overrightarrow{OA}\|\cdot\overline{OH}}$$

つまり，**$\overrightarrow{OA}$との内積の値が一定となる。**
逆に，$\overrightarrow{OA}$との内積がこの値になるような点$B(x,y)$は，必ずこの直線上にある。

$\overrightarrow{OA}$が零ベクトルでない時，この直線は$\overrightarrow{OA}$と垂直に交わり，その内積の値によって位置が確定する。さらに，３次元の場合は$\overrightarrow{OA}$に垂直な平面を表すことになる。一般に，これを**超平面**という。

3次元の場合は，$\{(x,y,z)|ax+by+cz=d\}$

一次不等式の見方



今は，右にベクトルAを描いているが，左を向いていたら，そのベクトルの向きに座標の値を正の数値とすることに注意しよう。

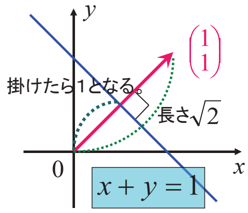
具体例(1)　内積による一次式表現

一次方程式

$x+y=1$ ⟺ $\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle=1$

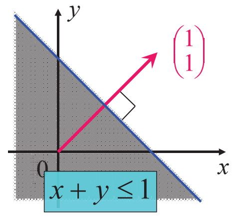
大きさは$\sqrt{2}$

このベクトルを**法線ベクトル**と呼ぶ。



一次不等式

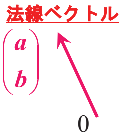
$x+y\le 1$ ⟺ $\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle\le 1$



具体例(1)　続き

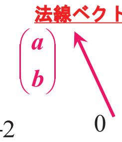
一次方程式

$\boldsymbol{ax+by=-2}$ ⟺ $\left\langle\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle=-2$



一次不等式

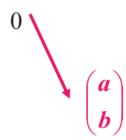
$\boldsymbol{ax+by\le -2}$ ⟺ $\left\langle\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle\le -2$



具体例(1)　続き

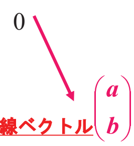
一次方程式

$\boldsymbol{ax+by=2}$ ⟺ $\left\langle\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle=2$



一次不等式

$\boldsymbol{ax+by\ge 2}$ ⟺ $\left\langle\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle\ge 2$



一次方程式と一次不等式のとらえ方

一次方程式

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=c \quad \Longrightarrow \quad \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle = c$$

法線ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$との**内積の値が一定の値** c である点 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ の集まり。特に，法線ベクトルが零ベクトルでなければ，この集合を**超平面(hyperplane)**と呼ぶ。超平面は法線ベクトルが張る１次元の部分空間の直交補空間($n-1$次元)を平行移動したものとなっている。

一次不等式

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n\le c \quad \Longrightarrow \quad \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle \le c$$

法線ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$との**内積の値が一定の値** c **以下**(または，**以上**)である点 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ の集まり。超平面を境界とする場合を考えると，この集合を**半空間(half space)**と呼ぶ。半空間は超平面によって空間が半分に仕切られたものとなっている。

線形計画問題の例

- ある工場で，2種類の製品 A と B を生産している。製品 A を 1kg 生産するには，原料が 3 トン，電力が 1kWh 必要であり，製品 B を 1kg 生産するには，原料が 2 トン，電力が 2kWh 必要である。1 日の原料，電力の使用可能量は，それぞれ 12 トン，8 kWh である。また，製品 A と B の 1kg あたりの利益はそれぞれ１万円である。この時，利益を最大にするには，A と B をいくらずつ生産すればよいかを求める問題に定式化せよ。

線形計画問題のモデル化

- *決定変数の決定:*製品Aをx kg生産し，製品Bをy kg生産しようと考える。決定変数とは制御可能な変数を指す。
- *目的関数の設定:*最適化（最大化なのか最小化なのか）を図る目標が何で，決定変数との関係はどんな式で表されるのか？ここでは関数 f の最大化を考える。
- *制約条件の設定:*問題を制限している（制約している）条件はどんなもので，決定変数との関係はどんな式で表されるのか？ここでは，条件式が4本ある。

製品	A	B	一日の使用可能量
生産量（kg）			
原料（トン）			
電力（kWh）			
利益（万円）			
総利益	最大化		

線形計画問題 (Linear Programming Problem)

目的関数 $\quad x+y \longrightarrow$ **最大化**

制約条件

$$3x+2y\le 12$$
$$x+2y\le 8$$
$$x\ge 0,\ y\ge 0$$

※　この問題は**一次方程式や一次不等式で表現される制約条件と一次式で表される目的関数**からなっている数理計画問題なので，「**線形計画問題**」と呼ばれる。この研究は，**1947年**に**線形計画法**として**ダンツィク**により始められた。その後，**クーン**と**タッカー**により**非線形計画法**が研究され，それが凸解析学へと発展してゆく。

⇒ このような問題を考えるには，**内積の線形表現** が重要になってくる。

内積の一次式表現による解釈

目的関数

$x+y$ 　ベクトル(1,1)との内積を考えている。(等高線)

制約条件

$3x+2y\le 12$ 　ベクトル(3,2)との内積が12以下となる半空間

$x+2y\le 8$ 　ベクトル(1,2)との内積が8以下となる半空間

$x\ge 0,\ y\ge 0$ 　ベクトル(1,0)との内積が0以上となる半空間

ベクトル(0,1)との内積が0以上となる半空間

線形計画問題の実行可能領域

目的関数

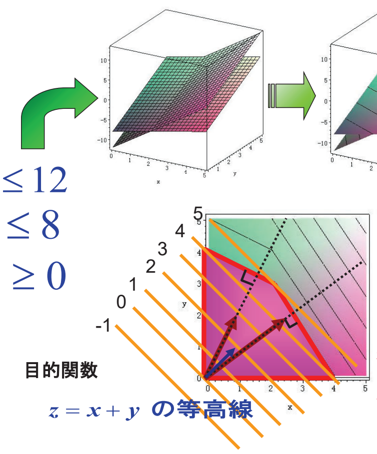
$x + y$

制約条件

$3x + 2y \le 12$

$x + 2y \le 8$

$x \ge 0, y \ge 0$



実行可能領域を図示すると，赤線で囲まれた境界を含む内部の領域。

レポート問題

ある工場で，２種類の製品 A と B を生産している。

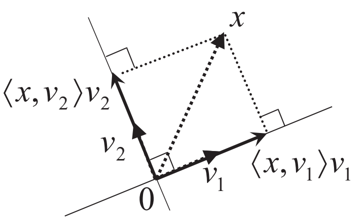
製品 A を 1kg 生産するには，原料が 2 トン，電力が 2 kWh 必要であり，製品 B を 1kg 生産するには，原料が 1 トン，電力が 4 kWh 必要である。１日の原料，電力の使用可能量は，それぞれ 6 トン，12 kWh である。また，製品 A と B の 1kg あたりの利益はそれぞれ１万円と１万円である。

この時，利益を最大にするには，A と B を１日にいくらずつ生産すればよいかを求める線形計画問題に定式化せよ。また，実行可能解の領域を図示して，上の問題の最適解をグラフから求め，製品 A と B を１日にいくらずつ生産すればよいか提案せよ。ただし，それぞれの一次式の法線ベクトルを求めて図示し，内積の考え方で図を描くこと。

※ 解答を手書きで書いたものをスキャンするか，スマホで撮影しPDFにして，学務情報システムのレポート機能から提出して下さい。締め切りは，基本的に次回の授業日の前日まで。氏名・学籍番号など忘れずに記入して下さい。

座標分解（各座標軸への正射影）

最初から大きさ1の直交するベクトルがいくつか与えられている場合



関数をベクトルとするような関数空間では，内積は積分の形になり，テレビ放送，ラジオ放送，携帯電話などに代表される**信号処理技術**，病院の診療で利用される**コンピューター断層撮影（ＣＴスキャン）**などにおいても座標分解してそれぞれの内積の値を求めるために測定を行い，後でそれを元に戻す操作を行っている。

$$x = \langle x, v_1 \rangle v_1 + \langle x, v_2 \rangle v_2$$

$$\left.\begin{matrix} \langle x, v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, v_2 \rangle \end{matrix}\right\}$$ これらの数値だけを電波に乗せて，テレビ，ラジオ，携帯電話で復元している。